

## TD 5

**Exercice 1.** À tout vecteur non nul  $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on associe la matrice  $H(v)$  définie par

$$H(v) = I - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2},$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{V}$  l'espace vectoriel engendré par le vecteur  $v$  et  $\mathcal{V}^\perp$  l'hyperplan engendré par les vecteurs orthogonaux à  $v$ .

1. Montrer que pour tous vecteurs  $v$  et  $w$ , on a  $(vv^T)w = (v, w)v$ .
2. Montrer que pour tout  $w \in \mathcal{V}$ , on a  $H(v)w = -w$ .
3. Montrer que pour tout  $w \in \mathcal{V}^\perp$ , on a  $H(v)w = w$ .
4. Quelle est la transformation géométrique associée à la matrice  $H(v)$  ?
5. Soient  $a, b \in \mathbb{R}^n$  deux vecteurs de norme 1. Montrer qu'il existe  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que  $b = H(v)a$ .
6. En déduire une méthode pour obtenir une décomposition  $QR$  d'une matrice  $A$ .

**Exercice 2.** En utilisant la méthode de Householder et la méthode de Gram-Schmidt, donner la décomposition  $QR$  de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.** Résoudre le système suivant en calculant une décomposition  $QR$  :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z &= 1 \\ x + y + 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \end{cases}.$$